最后一枚硬币：倒着想就能赢

25 枚硬币，两个人轮流拿，一次可以拿 1-3 枚，最后一个拿完的人赢。

1. 有没有必胜的方法？
2. 先拿的必胜还是后拿的？方法是什么？为什么？
3. 先玩再想：两人一组，在学习单印好的硬币上用铅笔划掉来玩（擦掉再玩），多玩几局，看看谁赢得多。
4. 把问题变小：如果只剩 1 枚、2 枚、3 枚，轮到你，你会赢吗？4 枚呢？5、6、7、8 枚呢？老师在白板上带全班一起倒着推（学习单上不写规律，学习单只用来玩）。
5. 找规律：哪些数字轮到你，你就一定会输？
6. 变一变：
    a. 拿到最后一枚的人输。25 枚时，还是先手赢吗？
    b. 一次可以拿 1–4 枚。25 枚时呢？
7. 自己出题：改一改硬币数或“一次最多拿几枚”，设计一个“后手必胜”的游戏，去考同学。

老师笔记：答案与要点

标题备选：最后一枚硬币 / 抢硬币 / 从抢硬币到 AlphaGo

必败的数（轮到谁谁就输）：4、8、12、16、20、24，也就是 4 的倍数。原因：不管对方拿 1、2、3 枚，你都能拿 3、2、1 枚，让这一轮两人合起来正好 4 枚（“凑 4”）。

25 枚：先手必胜。第一步拿 1 枚，剩 24 枚（4 的倍数）交给对方；以后每轮都“凑 4”：24 → 20 → 16 → … → 4 → 0，最后一枚一定是你拿。先手第一步要是拿错了，后手就能接过这个方法反过来赢。

方法比答案更重要：我们没有一盘一盘去试，而是从最小的情况倒着推，给每个数标上“必胜/必败”。这叫倒推法（数学里叫逆向归纳）。白板上那张“必胜/必败”表，就是电脑下棋时在做的事。

变化 a（拿最后一枚的人输）：必败的数变成 1、5、9、13、17、21、25。25 正好是必败数，先手必输！后手每轮“凑 4”，把对方留在 21、17、…、5、1。

变化 b（一次拿 1–4 枚）：要“凑 5”，必败的数是 5 的倍数；25 是 5 的倍数，先手又必输。

通用规律：一次最多拿 m 枚，就“凑 m + 1”；剩下的数是 m + 1 的倍数时，轮到谁谁输。（25 这个数选得很妙：换一条规则，答案就反过来。）

拓展到国际象棋，围棋

- 小游戏的“必胜/必败表”电脑能整张算出来，这叫把游戏“解开”（solved game）：
    - 井字棋：双方都不犯错，就是和棋。
    - 四子棋（Connect Four）：1988 年被证明先手必胜。
    - 五子棋（无禁手）：Victor Allis 在 1990 年代初证明先手必胜。（可以接到孩子们玩过的五子棋）
    - 西洋跳棋（Checkers）：2007 年被证明双方都下得完美就是和棋，团队用电脑算了 18 年。
- Hex（六角连棋）：数学家 Nash（电影《美丽心灵》的原型）证明了先手必胜，可证明里根本没说怎么赢！思路叫“偷策略”：假如后手有必胜法，先手就先随便下一颗子，然后假装自己是后手，照着那个方法下；多一颗子从来不会吃亏，所以先手也必胜——矛盾。所以后手不可能有必胜法，而 Hex 又不会和棋，于是先手必胜。
- **那国际象棋、围棋理论上也有必胜（或不败）策略吗？有。**1913 年数学家 Zermelo 证明：两个人轮流走、信息全公开、没有运气、而且棋局一定会结束的游戏，结果一定是三种之一——先手有必胜法、后手有必胜法、或者双方都有“不败法”（和棋）。证明的思路正是我们的倒推法。
    - 国际象棋能保证结束，靠的是“三次重复局面”和“50 步”规则。所以它的“真相”一定是白必胜、黑必胜、和棋三者之一——大多数人相信是和棋，但没人能证明。
    - 围棋靠禁止全局同形反复的规则保证结束；因为贴目有半目，基本不会和棋，所以一定有一方有必胜法——只是不知道是黑还是白。5×5（2002 年）和 7×7（2015 年）的小棋盘已经被电脑算出结果，19×19 远远做不到。
    - 为什么 Hex、五子棋能用“偷策略”，国际象棋不行？Hex 和五子棋里多下一颗子永远不会吃亏；国际象棋里有时“轮到你走”反而是坏事（叫 zugzwang，被迫走棋），所以这个证明在国际象棋里不成立。
- 国际象棋的残局：棋盘上只剩 7 个子以内时，电脑已经把整张“胜/负/和”表算完了（2018 年完成，叫“残局库”）。
- 围棋：合法的局面大约有 2×10^{170} 种，比整个宇宙的原子（约 10^{80}）还多得多，这张表永远填不完。

和 AI 有什么关联

- **表填得完 → 直接查表。**25 枚硬币、井字棋、国际象棋残局都是这样。
- **表填不完 → 往前看几步，再估一估。**
    - 往前看：我走这步，对方会走对他最好的那步，我再走……（叫“搜索”，和我们倒着推一样，只是只推几层）。
    - 估一估：看不到底的地方，就猜“这个局面我赢的机会有多大”。AlphaGo 的“价值网络”就是在学着估这张填不完的表，“策略网络”学的是“哪几步值得想”。
    - 怎么学会估？自己和自己下海量的棋：赢的走法多用，输的走法少用。
- **2016 年 3 月，AlphaGo 4 : 1 战胜李世石。**第 2 局第 37 手，AlphaGo 下了一步职业棋手都觉得“不会这样下”的棋；第 4 局，李世石用第 78 手妙招赢下了人类唯一的一局。可以和孩子讨论：AI 的“直觉”是从哪里来的？

动手：做一个会学习的“火柴盒 AI”

1961 年，AI 研究者 Donald Michie 用 304 个火柴盒和彩色珠子做了一台会学井字棋的机器（MENACE）。我们用同样的办法，教它玩缩小版的硬币游戏：

1. 游戏缩小成 8 枚硬币，人先拿，“AI”后拿。（8 是 4 的倍数，所以后手其实有必胜法——看 AI 能不能自己发现。）
2. 准备 7 个纸杯（或火柴盒），标上 1–7，表示“轮到 AI 时还剩几枚”。杯子里放珠子：红 = 拿 1 枚，黄 = 拿 2 枚，蓝 = 拿 3 枚。杯 1 只放红；杯 2 放红、黄；杯 3–7 红黄蓝各一颗。
3. 轮到 AI：从对应的杯子里闭眼摸一颗珠子，就拿那么多枚硬币；珠子先放在杯子前面。
4. AI 输了：没收它最后一步摸的那颗珠子（“这步不好，以后少走”），其他珠子放回去。轮到的杯子如果已经空了，AI 认输，同样没收它上一步的珠子。AI 赢了：珠子全部放回去。
5. 全班轮流和它下。我们用电脑模拟过：大约 30 局左右（对手越会玩，它学得越快），杯子里就只剩“把硬币留成 4 的倍数”的那颗珠子了。没人教它规律，它自己“学”出来了；杯 4 会被慢慢掏空，等于它学会了“剩 4 枚时我必输”。

讨论：人是怎么学会的（找规律、倒着推）？AI 是怎么学会的（试很多次、奖励和惩罚）？后者就是“强化学习”。AlphaGo 自己和自己下棋，用的是同一个思路，只是把火柴盒换成了神经网络。

视频 / 文章

- MindYourDecisions：Can You Solve The 21 Flags Game From Survivor?（8 分钟；真人秀《幸存者》里的同一个游戏：21 面旗，一次拿 1–3 面，拿到最后一面的赢）
- Vsauce2：A Game You Can Always Win（10 分钟；《爱丽丝梦游仙境》作者卡罗尔的“抢 100”游戏，同一个道理）
- NRICH：Got It（在教室电脑上和电脑对战：每次加 1–4，先到目标数的人赢；7–14 岁）
- Beast Academy：Nim 打印版（给小朋友的讲解和练习）
- Stand-up Maths：MENACE: the pile of matchboxes which can learn（14 分钟，火柴盒 AI，强烈推荐）
- Google DeepMind：AlphaGo – The Movie（90 分钟完整纪录片，免费）
- 维基百科：Solved game（哪些游戏已经被“解开”） 维基百科：Endgame tablebase（国际象棋残局库）